امواج گرانشی

وحیدکریمی پور_ دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۷ بهمن ۱۴۰۳

۱ مقدمه

در درس های مقدماتی فیزیک یاد گرفته ایم که معادله موج برای هر نوع میدانی ϕ به شکل زیر است:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}=0 \tag{۱}$$

که در آن v سرعت انتشار موج در محیط است. این معادله را به شکل زیر نیز می توان نوشت

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\nabla^2\phi=0 \tag{۲}$$

در این معادله ϕ می تواند نشان دهنده هر تغییری باشد که در یک محیط مادی رخ می دهد، مثل فشار یا دما در هوا یا ارتفاع آب در اقیانوس. می دانیم که امواج الکترومغناطیسی نیز در معادله ای مشابه صدق می کنند که البته در این صورت میدان مادی ای وجود ندارد و امواج الکترومغناطیسی با سرعت نور منتشر می شوند. این معادله را می توان به شکل هموردای زیر نیز نوشت که در این صورت براحتی دیده می شود که شکل خود را تحت تغییر مختصات حفظ می کند:

$$\partial^\mu\partial_\mu\phi=\Box\phi=0, \tag{۳}$$

که در آن

$$\partial_\mu=(\frac{1}{c}\partial_t,\partial_x,\partial_y,\partial_z). \tag{۴}$$

حل کلی چنین معادله ای به صورت ترکیبی از امواج تخت است که هر موج تخت به صورت زیر است:

$$\phi_k(\mathbf{r},t)=Ae^{i\omega t-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{۵}$$

این حل نشان دهنده موج تختی با فرکانس ω است که در راستای $\hat{\mathbf{k}}$ حرکت می کند، طول موج آن برابر با $\lambda=\frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}$ است و فرکانس و بردار موج آن نیز در رابطه پاشندگی [۱]

$$\omega^2=c^2|\mathbf{k}|^2. \tag{۶}$$

[۱] Dispersion Relation

صدق می کنند. سوالی که با آن مواجه هستیم این است که آیا با توجه به تصویر جدیدی که از گرانش در نسبیت عام پیدا کرده ایم، تصویری که در آن فضازمان در اثر حضور ماده به صورت موضعی انحنا پیدا می کند، آیا این انحنا و این میدان گرانشی نیز مثل یک موج در فضا منتشر می شود یا نه؟ اگر چنین است، چگونه می توان به معادله ای شبیه به معادله موج برای آن رسید و آن چیزی که نقش ϕ را ایفا می کند چیست؟ این امواج چگونه ایجاد می شوند، فرکانس و طول موج آنها در چه محدوده ای است؟ آیا امواج گرانشی قابل مشاهده هستند؟ آیا تا کنون مشاهده شده اند؟ شکل این امواج چگونه است و چطور می توان آنها را شناسایی کرد؟ این درس پاسخی کوتاه و مقدماتی به این سوالات است. هدف آن تنها این است که علاقه دانشجو را به این موضوع برانگیزد. طبیعی است که دانشجوی علاقمند برای فهم بهتر پاسخ این سوالات باید به یک کتاب یا درسنامه تخصصی در نسبیت عام و کیهان شناسی مراجعه کند.

در این درس یاد خواهیم گرفت که امواج گرانشی نیز در معادله ای مثل معادله موج صدق می کنند و این معادله چنین است:

$$\Box g_{\mu\nu} = \partial^{\alpha}\partial_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0. \qquad (۷)$$

بنابراین، آن چیز ی که نقش میدان ϕ را ایفا می کند، خود متریک فضازمان است. این امواج با سرعت نور منتشر می شوند و فرکانس و طول موج آنها نیز در همان رابطه پاشندگی (۶) صدق می کند. البته خواص دیگر این امواج نظیر قطبش آنها، و چگونگی ایجاد یا آشکارسازی آنها با امواج الکترومغناطیسی فرق می کند. قبل از این که به چگونگی استخراج معادله امواج گرانشی بپردازیم، نخست به پدیدارشناسی این امواج توجه می کنیم.

۲ پدیدارشناسی امواج گرانشی

نخستین نکته ای که به آن توجه می کنیم این است که در گرانش نیوتنی امواج گرانشی وجود ندارند و این پدیده یک پدیده کاملا نسبیتی است. برخلاف امواج الکترومغناطیسی، شدت این امواج به نسبت عکس فاصله و نه عکس مجذور فاصله کم می شود. نخستین شواهد وجود امواج گرانشی به طور غیر مستقیم در سال ۱۹۷۴ بدست آمد. در این سال مطالعات راسل آلن هالس [۲] و ژوزف هووتن تایلر [۳] نشان داد که دوره تناوب یک تپ اختر دوتایی [۴] کند می شود و مقدار این کند شدن دقیقا مطابق با پیش بینی نظر یه نسبیت عام است به این ترتیب که تابش امواج گرانشی از این سامانه باعث از دست دادن انرژی و در نتیجه کند شدن دوره تناوب حرکتی آنها می شود. جایزه نوبل سال ۱۹۹۳ به دلیل این کشف نصیب هالش و تایلر شد. اما آشکارسازی مستقیم امواج گرانشی تنها در سال ۲۰۱۷ و با ساخت آشکارسازهای فوق العاده دقیق از نوع تداخل سنج های لیزری موسوم به لایگو (رصدخانه تداخل سنج لیزری امواج گرانشی) [۵] امکان پذیر شد. در این سال امواج ناشی از برخورد و ادغام دو سیاهچاله با جرمهای ۲۹ و ۳۶ برابر جرم خورشید در فاصله ۳.۱ میلیارد سال نوری، به زمین رسید و توسط آشکارسازهای فوق العاده دقیق ثبت شد. تخمین زده شدکه در آخرین کسری از یک ثانیه مانده به ادغام این دو سیاهچاله میزان انرژی گرانشی ساطع شده به اندازه ۵۰ برابر کل انرژی کلیه ستارگان کیهان بوده است. طبیعتا این انرژی وقتی از آن فاصله دور به زمین می رسد، آنقدر ضعیف می شود که تنها با ابزارهای خیلی دقیق می توان آن را اندازه گرفت. به طور کلی ساختار قطبش امواج گرانشی به گونه ای است که می توانند طول هایی را که در صفحه عمود بر انتشار آنها چیده شده، منبسط و منقبض کنند. به عبارت دیگر می توانند در یک دوره تناوب خود، دایره ای را که در صفحه عمود بر انتشار قرار گرفته دو بار تبدیل به

[۲] Russell Alan Hulse

[۳] Joseph Hooton Taylor

[۴] Binary Pulsar

[۵] LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory)

یک بیضی کنند که در هر بار قطر بزرگ تر بیضی در یک جهت قرار می گیرد. این تغییر طول به اندازه ای است که بازوهای تداخل سنج لیزری به طول چهارکیلومتر، به اندازه یک هزارم قطر پروتون فشرده یا منبسط می شوند و این تغییر طول قابل اندازه گیری است. در جه اطمینان [۶] اندازه گیری های لایگو برابر با 99.99994 درصد بوده که جای هیچ شکی را برای درستی امواج گرانشی و ثبت آنها باقی نمی گذارد. جایزه نوبل سال ۲۰۱۷ به همین مناسبت به راینر وایس [۷]، کیپ تورن [۸] و بری باریش [۹] اعطا شده است.

- **تمرین:** این تمرین برای درک دقت اندازه گیری لایگو ست. فرض کنید که می خواهیم فاصله زمین را تا نزدیک ترین ستاره خارج از منظومه شمسی اندازه بگیریم. این ستاره آلفا_قنطورس [۱۰] نام دارد. اگر بتوانیم همان دقتی را که در آزمایش لایگو به کار رفته در این مورد نیز به کار ببریم، این فاصله را با چه دقتی می توانیم اندازه گیری کنیم.

۱.۲ چشمه های امواج گرانشی

بنابر نسبیت عام، هر نوع اختلالی که در توزیع جرم در فضا رخ دهد، به شرطی که این اختلال دارای تقارن کروی نباشد، امواج گرانشی تولید خواهد کرد. البته به دلیل ضعیف بودن نیروی گرانش، برای آنکه این امواج گرانشی قابل ملاحظه باشند، اختلال ایجاد شده در توزیع جرم می بایست بسیار سهمگین باشد. نمونه هایی از این اختلال ها این ها هستند:

- یک ابر نو اختر،
- یک تپ اختر دوتایی یا دو کوتوله سفید،
- دو سیاهچاله که به دور یکدیگر می چرخند یا در آستانه ادغام هستند،
- ستاره های نوترونی چرخان،
- هر دو جسم کیهانی که به دور یکدیگر می چرخند.

- **تمرین:** زمین و خورشید را در نظر بگیرید. مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل این سیستم دوتایی برابر با 1.14×10^{36} ژول است. این سیستم دوتایی طبیعتاً از خود امواج گرانشی تابش می کند و توان تابشی این امواج برابر با ۲۰۰ وات است. اگر این مکانیزم تنها مکانیزم برای کاهش انرژی این سیستم باشد، تخمین بزنید که چه مدت طول خواهد کشید که زمین روی خورشید بیفتد.

- **تمرین:** در یک محاسبه دقیق تر نشان داده می شود که هرگاه دو جسم با جرم های m_1 و m_2 دور یکدیگر بچرخند، شعاع چرخش آنها به دلیل تابش امواج گرانشی طبق معادله زیر کم می شود:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{64}{5}\frac{G^3}{c^5}\frac{m_1 m_2 (m_1+m_2)}{r^3}, \qquad (۸)$$

که در آن r شعاع چرخش این دو به دور یکدیگر است. با استفاده از این رابطه حساب کنید چه مدت طول می کشد که زمین روی خورشید بیفتد.

[۶] Confidence Level
[۷] Reiner Weiss
[۸] Kip Thorne
[۹] Barry Barish
[۱۰] Alpha-Centauri

۳ معادله امواج گرانشی

حال که تا حدودی با پدیدارشناسی امواج گرانش ی آشنا شده ایم می توانیم به موضوع اصلی این درس یعنی چگونگی استخراج معادله موج گرانشی در چارچوب نسبیت عام بپردازیم. قبل از آن نیازمند آن هستیم که با مختصاتِ موسوم به مختصات هارمونیک آشنا شویم.

۱.۳ مختصات هارمونیک

در فضای تخت و در مختصات دکارتی می دانیم که

$$\Box x^{\lambda} = \partial^{\mu}\partial_{\mu}x^{\alpha} = \partial^{\mu}\delta^{\alpha}_{\mu} = 0.$$

روی یک خمینه دلخواه، آن مختصات موضعی ای را که شرط بالا برایشان برآورده شود، مختصات هارمونیک می نامیم. حال نشان می دهیم که این شرط معادل با شرط زیر است:

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = 0. \tag{۹}$$

یا

$$g^{\mu\nu}\Gamma_{\alpha,\mu\nu} = 0 \tag{۱۰}$$

می دانیم که برای هر میدان اسکالر مثل V ، معادله دالامبر به صورت زیر است:

$$\Box V = \nabla^{\mu}\nabla_{\mu}V = g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}V = g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}(\partial_{\nu}V) = g^{\mu\nu}(\partial_{\mu}\partial_{\nu}V - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\partial_{\alpha}V). \tag{۱۱}$$

در نتیجه در مختصات هارمونیک برای هر میدان اسکالری، معادله دالامبر به صورت ساده زیر درمی آید:

$$g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}V = 0. \tag{۱۲}$$

اگر به جای V هر کدام از مختصه های x^{λ} را قرار دهیم، می بینیم که

$$\Box x^{\lambda} = 0. \tag{۱۳}$$

که نشان می دهد چرا این مختصات، مختصات هارمونیک نامیده می شوند. شرط هارمونیک بودن مختصات را به گونه دیگری هم می توان نوشت. کافی است به نماد کریستوفل توجه کنیم:

$$g^{\mu\nu}\Gamma_{\alpha\mu\nu} = g^{\mu\nu}\frac{1}{2}(g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) = 0 \tag{۱۴}$$

که با توجه به متقارن بودن دو جمله اول داخل پرانتز نسبت به تعویض اندیس های μ و ν می توان آن را به صورت زیر نیز نوشت:

$$g^{\mu\nu}(g_{\alpha\mu,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\alpha})) = 0. \tag{۱۵}$$

می دانیم که برای هر میدان اسکالری مثل این رابطه آخری نشان می دهد که چرا این مختصات را می توانیم مختصات هارمونیک بنامیم.

۴ معادلات میدان خطی شده

از آنجا که امواج گرانشی معمولا اختلال خیلی کوچکی در ساختار فضا زمان ایجاد می کنند، می توانیم فرض کنیم که در فواصل خیلی زیاد از چشمه امواج گرانشی این میدان ضعیف است. در چنین شرایطی می توانیم معادله اینشتین در غیاب ماده را در نظر بگیریم و از ضعیف بودن میدان گرانش استفاده کنیم و شکل خطی شده آن را در نظر بگیریم. می دانیم که تانسور ریچی به شکل زیر است:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}. \tag{۱۶}$$

در میدان گرانش ضعیف، متریک $g_{\mu\nu}$ را می توان تقریبا ثابت گرفت و در نتیجه از توان دوم مشتقات آن می توان صرف نظر کرد. در این شرایط معادله اینتشین در فضای خالی یعنی $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 0$ به صورت زیر در می آید:

$$g^{\mu\nu}(g_{\mu\nu,\rho\sigma} - g_{\mu\rho,\nu\sigma} - g_{\mu\sigma,\nu\rho} + g_{\rho\sigma,\mu\nu}) = 0 \tag{۱۷}$$

حال از طرفین رابطه (۱۵) مشتق می گیریم و از جملات درجه دو از مشتقات متریک صرف نظر می کنیم، زیرا فرض این است که تغییرات میدان گرانش ضعیف است. بنابراین به رابطه زیر می رسیم:

$$g^{\mu\nu}(g_{\mu\rho,\nu\sigma} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\rho\sigma}) = 0 \tag{۱۸}$$

در این رابطه جای اندیس های ρ و σ را عوض می کنیم تا به رابطه زیر برسیم:

$$g^{\mu\nu}(g_{\mu\sigma,\nu\rho} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\rho\sigma}) = 0 \tag{۱۹}$$

حال رابطه های (۱۸، ۱۹) و (۱۷) را باهم جمع می کنیم و بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} & g^{\mu\nu}\Big[g_{\mu\nu,\rho\sigma} - g_{\mu\rho,\nu\sigma} - g_{\mu\sigma,\nu\rho} + g_{\rho\sigma,\mu\nu} + g_{\mu\rho,\nu\sigma} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\rho\sigma} + g_{\mu\sigma,\nu\rho} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\rho\sigma}\Big] \\ = \quad & g^{\mu\nu}g_{\rho\sigma,\mu\nu} = 0 \end{aligned} \tag{۲۰}$$

بنابراین در یک میدان گرانش ضعیف و در غیاب ماده، متریک در معادله موج زیر صدق می کند:

$$\Box g_{\rho\sigma} = g^{\mu\nu}g_{\rho\sigma,\mu\nu} = 0. \tag{۲۱}$$

بنابراین، آن میدانی که در معادله موج صدق می کند، خودِ متریک فضازمان است.

شکل ۱: هوارد پرسی رابرتسون (۱۹۰۳-۱۹۶۱)

هوارد پرسی رابرتسون [a] ، ریاضیدان و فیزیکدان آمریکایی بود که برای پژوهشهایش در کیهان شناسی فیزیکی و هم چنین مکانیک کوانتومی شناخته می شود. او به خصوص به خاطر پدیده پوینتینگ-رابرتسون [b] و هم چنین اثبات کلی اصل عدم قطعیت برای مشاهده پذیرهایی که جابجا نمی شوند، مشهور است. اثر پوینتینگ-رابرتسون به پدیده ای گفته می شود که تابش خورشید باعث کاسته شدن اندازه حرکت زاویه ای ذرات گرد و غباری که به دور خورشید می گردند، می شود. در کنار این ها رابرتسون به خاطر یک موضوع دیگر هم که در تاریخ علم جالب است شهرت دارد: در ۱۹۳۶ اینشتین و نی تان روزن [c] مقاله ای به فیزیکال ریویو فرستادند با این ادعا که امواج گرانشی هرگز نمی توانند وجود داشته باشند، چرا که همواره منجر به تکینگی می شوند. فیزیکال ریویو این مقاله را مثل هر مقاله دیگری به داور فرستاد که بعدها معلوم شد این دوار رابرتسون بوده است. رابرتسون هم در یک گزارش داوری ۱۶ صفحه ای ثابت کرد که این نتیجه درست نیست و تکینگی تنها ناشی از مختصات نامناسبی است که اینشتین و روزن اختیار کرده اند. اینشتین که تا آن موقع با مفهوم داوری آشنا نبود و انتظار نداشت که مقاله او نیز فرایند داوری را طی کند،با عصبانیت مقاله را از فیزیکال ریویو پس گرفت و به عنوان اعتراض گفت که دیگر هیچ مقاله ای در فیزیکال ریویو منتشر نخواهد کرد و ظاهرا تا پایان عمر بر عهد خود وفادار ماند. نهایتا همکار دیگر اینشتین به نام لئوپولد اینفلد، او را قانع کرد که مقاله قبلی را اصلاح کرده و با نتیجه متضاد نتیجه قبلی در یک جای دیگر چاپ کند.

[a] Howard Percy Robertson
[b] Pointing-Robertson effect
[c] Nathan Rosen